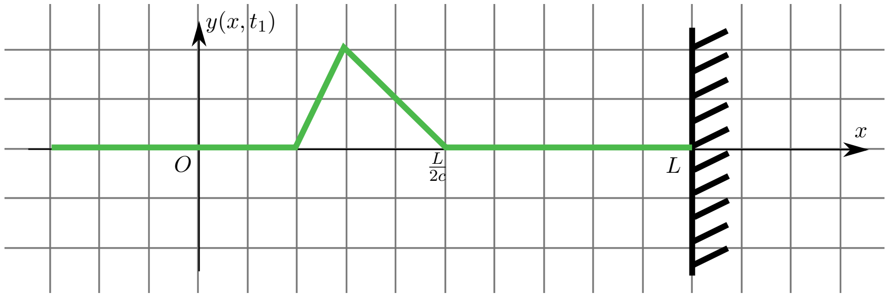
I. Propagation d'une déformation sur une corde vibrante

1. Le front avant de l'onde étant situé en $x = 0$ à $t = 0$, il atteint le mur à l'instant $\boxed{t_r = \frac{L}{c}}$.

2. En supposant $t > 0$ par exemple, la corde à t en x a la hauteur qu'elle avait à $t = 0$ à la distance ct vers la gauche de ce point, donc :

$$\boxed{y(x,t) = y(x - ct, 0) = F_i(x - ct)}.$$

3. A l'instant t_1, la distance parcourue depuis $t = 0$ est $L/2$, d'où l'allure :

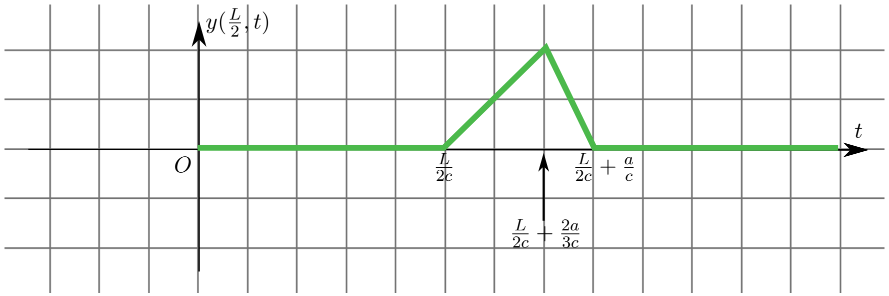


Corde à l'instant $t = t_1 = \frac{L}{2c}$.

4. On a donc $y(\frac{L}{2},t) = F_i(\frac{L}{2} - ct)$, donc l'expression s'obtient en remplaçant x dans $F_i(x)$ par $\frac{L}{2} - ct$:

$$y(\tfrac{L}{2},t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t > \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + a\right) \\ \frac{3h}{a}\left(\frac{L}{2} - ct + a\right) & \text{si} \quad \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + \frac{2a}{3}\right) \leq t < \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + a\right) \\ -\frac{3h}{2a}\left(\frac{L}{2} - ct\right) & \text{si} \quad \frac{L}{2c} \leq t < \frac{1}{c}\left(\frac{L}{2} + \frac{2a}{3}\right) \\ 0 & \text{si} \quad t < \frac{L}{2c} \end{cases}$$

Au delà des expressions mathématiques explicites, le signe $-$ dans le changement de variable $x \mapsto \frac{L}{2} - ct$ introduit une inversion de l'axe des abscisses entre x et t, d'où une réflexion sur la courbe, dont la pente forte se trouve maintenant en avant :



Corde en $x = \frac{L}{2}$ en fonction du temps.

5. Le mur empêche l'énergie portée par l'onde de traverser, donc le flux d'énergie s'inverse grâce à la formation d'une onde réfléchie qui se propage en sens inverse.

6. **a)** On applique le même raisonnement que précédemment, mais l'onde se propage vers la gauche donc $\boxed{y_r(x,t) = F_r(x + ct)}$.

b) Par le principe de superposition, on peut sommer l'onde incidente et l'onde réfléchie. L'onde totale s'écrit donc $\boxed{y(x,t) = F_i(x - ct) + F_r(x + ct)}$.

7. **a)** La corde ne peut s'écarter de sa position là où elle est fixée, donc en $x = L$:

$$\boxed{y(L,t) = 0 = F_i(L - ct) + F_r(L + ct) \quad \forall\, t \geq t_r}.$$

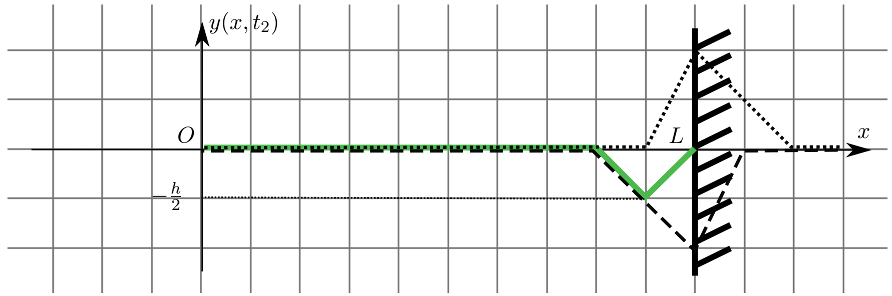
b) On en déduit que $y_r(L,t) = F_r(L + ct) = -F_i(L - ct)$. Ensuite, l'onde réfléchie en x à l'instant t est égale à l'onde en L à un instant inférieur diminué du temps de propagation de L à x : $y_r(x,t) = y_r(L, t - \frac{L-x}{c})$. On en déduit finalement $y_r(x,t) = -F_i\left(L - c(t - \frac{L-x}{c})\right)$, ou après simplification :

$$\boxed{y_r(x,t) = -F_i(2L - (x + ct))}.$$

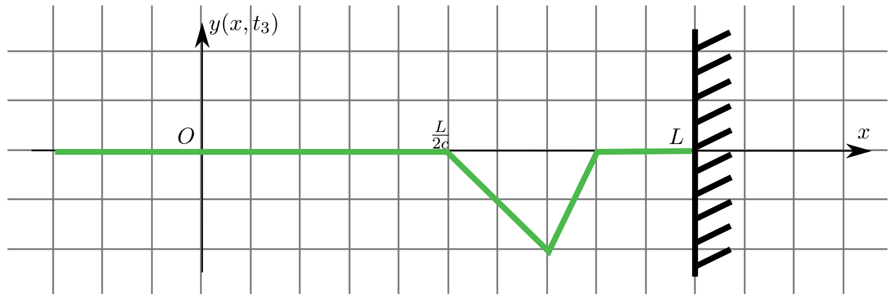
Par conséquent l'onde totale s'écrit $\boxed{y(x,t) = F_i(x - ct) - F_i(2L - (x + ct))}$.
Remarque : on obtient notamment $y_r(x,0) = -F_i(2L - x) = F_r(x)$, donc à $t = 0$ l'onde réfléchie est obtenue par une symétrie centrale par rapport au point du mur $(x = L, y = 0)$. L'onde réfléchie est bien située derrière le mur...

8. **a)** A t_2, l'onde incidente $F_i(x - (L + \frac{2a}{3}))$ est obtenue par une translation en x de $L + \frac{2a}{3}$ de l'onde initiale (pointillé), alors que l'onde réfléchie $-F_i(-(x - (L - \frac{2a}{3})))$ s'obtient d'abord par une translation en x de $L - \frac{2a}{3}$ puis une symétrie centrale par rapport au point $(x = L - \frac{2a}{3}, y = 0)$ (tirets). L'onde résultante est la somme des deux ondes (trait continu).
Remarque : la perturbation est moins ample que la perturbation initiale à cet instant (jusqu'à $-\frac{h}{2}$). L'énergie manquante dans la déformation (énergie potentielle de type élastique) est compensée par une énergie cinétique plus élevée.

b) A t_3 l'onde incidente n'existe plus (elle est du côté droit du mur). Seule l'onde réfléchie est présente, et vaut $-F_i(-(x - \frac{L}{2}))$. Elle s'obtient donc par une translation de l'onde initiale de $\frac{L}{2}$ puis une symétrie centrale par rapport au point $(x = \frac{L}{2}, y = 0)$.



Corde à l'instant $t = t_2 = \frac{L + 2a/3}{c}$.



Corde à l'instant $t = t_3 = \frac{3L}{2c}$.

II. Mouvement d'un caillou sur un pneu

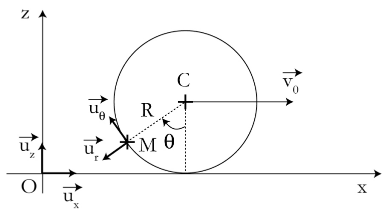


FIGURE 1 – Repérage du problème.

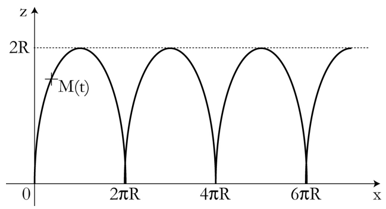


FIGURE 2 – Trajectoire du caillou accroché à la roue.

1. a) La distance dx parcourue par le centre C de la roue est égale à la distance parcourue par le point de contact avec la route. Vu que la roue roule sans glisser, cette distance vaut $Rd\theta$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{d}x = R\mathrm{d}\theta} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 = R\dot{\theta} \Longrightarrow \boxed{\omega = \frac{v_0}{R} = \mathrm{cte}}$$

b) On a $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = cte$, d'où par intégration au cours du temps, avec $\theta(0) = 0$: $\boxed{\theta = \frac{v_0}{R}t + 0 = \omega t}$.

2. D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$.
Or la roue avance en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_0, donc C a un mouvement uniquement selon Ox, à la cote constante $z_C = R$, et évoluant selon $x_C = v_0 t$. Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= [v_0 t\overrightarrow{u_x} + R\overrightarrow{u_z}] + R\overrightarrow{u_r} \\ &= [R\theta\overrightarrow{u_x} + R\overrightarrow{u_z}] + R\left[-\sin\theta\overrightarrow{u_x} - \cos\theta\overrightarrow{u_z}\right]\end{aligned} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = R\left[\theta - \sin\theta\right] \\ z(t) = R\left[1 - \cos\theta\right]\end{cases}}$$

3. a) On dérive le vecteur position de M : $\boxed{\begin{cases}\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left[(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\right] \\ \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = R\omega^2\left[\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z}\right]\end{cases}}$

b) Au moment où M est en contact avec le sol, $\theta = 0\,[2\pi]$, alors : $\boxed{\begin{cases}\overrightarrow{v}_{contact} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{a}_{contact} = R\omega^2\overrightarrow{u_z}\end{cases}}$

4. On constate que $\mathbf{x(t)}$ **est toujours croissante** ($\frac{dx}{dt} = R\omega\left[1 - \cos\theta\right] \geq 0$). De plus, $\mathbf{z(t)}$ est **bornée** entre 0 et $2R$, avec des points de contact sur le sol (**points de rebroussement**) tous les $\theta = 0\,[2\pi]$, c'est-à-dire tous les $x = 0\,[2\pi R]$. La trajectoire du caillou, dans le référentiel terrestre, a donc l'allure suivante représentée dans la Fig. 2 (cycloïde).

5. Le caillou, au moment où il se détache, possède la vitesse qu'il avait sur la roue. Or $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_x} = \frac{dx}{dt} \geq 0$, donc le caillou **partira vers l'avant** (il aura ensuite un mouvement de chute libre, jusqu'à éventuellement rencontrer à nouveau la roue).

6. Le caillou a un **mouvement circulaire de rayon R autour de C** (fixe dans $\mathcal{R}'$).